4次元空間内の2次元曲面の分類

Classification of surfaces in the 4-dimensional space

丸 本 嘉 彦
Yashihiko MARUMOTO

4次元空間内に埋め込まれた2次元曲面の幾何学的性質については、その多くは依然未解決のままである。

1．分類問題：これは数学の各分野における究極の目標とも言える。
2．同型問題：1にアタックするための現実的な1つの方向ともいえる。
3．不変量の研究：2をさらに、代数的な側面から捕らえようとするものといえる。

本研究では、4次元空間内の2次元曲面の補空間の代数的不変量の研究により同型問題について論じることを目標とした。

特に、リボン型曲面の補空間の2次元ホモトピー群を記述することを目指した。この曲面の場合、補空間がハンドル体として表示することができる。このハンドル構造を利用して、その普遍被覆空間を幾何学的に構成することにより、2次元ホモトピー群を計算するための完全列を作ることに成功した。

この完全列から、ホモトピー群を具体的に記述することは非常に困難である。ひとつには、このホモトピー群が無限生成アーベル群であるからである。ここで、このホモトピー群を、基本群が作用した加群としてみることにより無限生成となる可能性がある。

本研究は、リボン型の曲面の性質を有効に使うことにより、このホモトピー群の計算を行い、さらにその空間が非球面上になるための必要十分条件が、ホィトニー予想と呼ばれる問題が肯定的になることである、ことを証明した。

このホィトニー予想は本来は2次元単体複体の研究から出てきた問題であり、非常な難問で依然未解決である。

本研究により、このホィトニー予想が4次元空間内の曲面の一つの性質として出現するという予想外の側面も明らかにされた。

以上の結果については、M.Boileau他編「Progress in Knot Theory and related Topis」（Herman出版、1997年）に掲載出版された。